第 23 講　内積と平面ベクトル

23　三角形 ABC の外接円 O の中心を O とすると

$$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしているとする．円 O の半径を 1 とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

(2)　三角形 ABC の面積 S を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　内積と平面ベクトル

23　三角形ABCの内部に点Pがある．$2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ を満たし，$AP=\sqrt{2}$，$BP=2$，$CP=1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}$ を求めよ．

(2)　三角形ABCの3辺の長さと面積を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-2$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=-1$

㋑　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-1$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

㋒　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-1$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=-2$

(2)　㋐　$AB=\sqrt{10}$，$BC=CA=2\sqrt{5}$，面積 5

㋑　$AB=\sqrt{10}$，$BC=CA=\sqrt{5}$，面積 $\dfrac{5}{2}$

㋒　$AB=\sqrt{5}$，$BC=CA=\sqrt{10}$，面積 $\dfrac{2}{5}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　内積と平面ベクトル

23　三角形ABCの外接円 O の中心をOとすると

$$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

を満たしているとする．円 O の半径を1とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ．

(2)　三角形ABCの面積 S を求めよ．

【答】 (1) $\overrightarrow{OC}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}-\frac{4}{5}\overrightarrow{OB}$　(2) $\frac{6}{5}$

【解答】

(1)　与式より $5\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}$　よって $\boldsymbol{\overrightarrow{OC}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}-\frac{4}{5}\overrightarrow{OB}}$

(2)　(1)の結果より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OC}|^2&=\left|-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}-\frac{4}{5}\overrightarrow{OB}\right|^2\\&=\frac{1}{25}(9|\overrightarrow{OA}|^2+24\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+16|\overrightarrow{OB}|^2)\\&=\frac{1}{25}(9\times1^2+24\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+16\times1^2)=1+\frac{24}{25}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

となるが，$|\overrightarrow{OC}|=1$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ を得る．

ここで

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CA}|^2&=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}|^2\\&=|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2\\&=1^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}-\frac{4}{5}\overrightarrow{OB}\right)+1^2\\&=2-2\left(-\frac{3}{5}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{4}{5}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)=\frac{16}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CB}|^2&=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|^2\\&=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2\\&=1^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}-\frac{4}{5}\overrightarrow{OB}\right)+1^2\\&=2-2\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{4}{5}|\overrightarrow{OB}|^2\right)=\frac{18}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}&=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2\\&=0-\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)+1^2=\frac{12}{5}\end{aligned}$$

となるので

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2|\overrightarrow{CB}|^2-(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})^2}=\boldsymbol{\frac{6}{5}}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　内積と平面ベクトル

23　三角形ABCの内部に点Pがある．$2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ を満たし，$AP=\sqrt{2}$，$BP=2$，$CP=1$ であるとき，次の各問いに答えよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}$ を求めよ．

(2)　三角形ABCの3辺の長さと面積を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-2$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=-1$

　　㋑　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-1$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

　　㋒　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=-1$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=-2$

(2)　㋐　$AB=\sqrt{10}$，$BC=CA=2\sqrt{5}$，面積 5

　　㋑　$AB=\sqrt{10}$，$BC=CA=\sqrt{5}$，面積 $\frac{5}{2}$

　　㋒　$AB=\sqrt{5}$，$BC=CA=\sqrt{10}$，面積 $\frac{2}{5}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋑

【解答】

(1)　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=p$，$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=q$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=r$ とすると，与式より

$$2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

$$2|\overrightarrow{AP}|^2+p+2r=0$$

$$\therefore\quad p+2r=-4\quad\cdots\cdots①$$

同様に

$$\begin{cases}2p+|\overrightarrow{BP}|^2+2q=0\\ 2r+q+2|\overrightarrow{CP}|^2=0\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}2p+2q=-4 & \cdots\cdots②\\ q+2r=-2 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①～③より

$$p=-2,\quad q=0,\quad r=-1$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-2,\quad \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\quad \overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=-1}$$

(2)　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2&=|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}|^2\\&=|\overrightarrow{AP}|^2-2\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+|\overrightarrow{BP}|^2\\&=(\sqrt{2})^2-2\times(-2)+2^2\\&=10\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{AB=\sqrt{10}}$$

同様に

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BC}|^2&=|\overrightarrow{BP}|^2-2\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}+|\overrightarrow{CP}|^2\\&=2^2-2\times0+1^2=5\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$$
$$=1^2-2\times(-1)+(\sqrt{2})^2=5$$
$$\therefore\quad \mathbf{BC=CA=\sqrt{5}}$$

また

$$\cos\angle\mathrm{APB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{BP}}|}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

同様に

$$\cos\angle\mathrm{BPC}=0,\quad \cos\angle\mathrm{CPA}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるので

$$\sin\angle\mathrm{APB}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\angle\mathrm{BPC}=1,\quad \sin\angle\mathrm{CPA}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる．よって求める面積は

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{AP}\times\mathrm{BP}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times\mathrm{BP}\times\mathrm{CP}\times1+\frac{1}{2}\times\mathrm{CP}\times\mathrm{AP}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=1+1+\frac{1}{2}$$
$$=\mathbf{\frac{5}{2}}$$

≪別解≫

（3 辺の長さは同様の計算により得る.）

$\mathrm{AB}=\sqrt{10}$，$\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{5}$ より　$\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}=1:1:\sqrt{2}$

よって，三角形 ABC は AB を斜辺とする直角二等辺三角形.

ゆえに求める面積は

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\mathbf{\frac{5}{2}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。